Система уравнений переноса излучения в присутствии магнитного поля для линий поглощения.

Одной из первых работ, посвященных формулировке и решению уравнений переноса излучения в магнитоактивных линиях, была статья Унно (1956). Унно предложил систему уравнений переноса в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\cos\vartheta \frac{dI}{d\tau} &= (1+\eta_I)\cdot I + \eta_Q \cdot Q + \eta_V \cdot V - (1+\eta_I)\cdot B \\
\cos\vartheta \frac{dQ}{d\tau} &= \eta_Q \cdot I + (1+\eta_I)\cdot Q - \eta_Q \cdot B \\
\cos\vartheta \frac{dV}{d\tau} &= \eta_V \cdot I + (1+\eta_I)\cdot V - \eta_V \cdot B
\end{aligned} \qquad [1]$$

где $\cos\vartheta$ - косинус гелиоцентрического угла (иногда в формулах указывается как μ)

B - функция Планка (при условии ЛТР),

I, Q, U, V - параметры Стокса.

Коэффициенты поглощения в параметрах Стокса определяются как:

$$\begin{aligned}
\eta_I &= \frac{\eta_p}{2}\cdot\sin^2\gamma + \frac{\eta_l+\eta_r}{4}\cdot(1+\cos^2\gamma) \\
\eta_Q &= \left(\frac{\eta_p}{2} - \frac{\eta_l+\eta_r}{4}\right)\cdot\sin^2\gamma \\
\eta_V &= \left(\frac{-\eta_l+\eta_r}{2}\right)\cdot\cos\gamma
\end{aligned} \qquad , \qquad [2]$$

где

η_p - коэффициент поглощения линейно-поляризованного света

η_l - коэффициент поглощения света, левополяризованного по кругу

η_r - коэффициент поглощения света, правополяризованного по кругу

Величины η_p, η_l и η_r совпадают с коэффициентом поглощения в линии κ_λ, не расщеплённой в магнитном поле, за исключением того, что η_l и η_r смещены по длине волны от κ_λ на величину магнитного расщепления линии $\pm\Delta\lambda_H$.

Индексы при коэффициентах l, r - *left, right* иногда заменяются на индексы b, r - *blue, red*.

Известно, что в продольном поле σ-компонента с меньшей частотой (red) при направлении излучения вдоль поля поляризована по правому $(right)$ кругу.

Уравнения Унно написаны без учёта процессов рассеяния в линии и без учёта магнитооптического эффекта. Учесть магнитооптический эффект впервые удалось Д.Н.Рачковскому. Он сформулировал систему уравнения переноса излучения и нашёл её аналитическое решение: Рачковский (1962 а,б). Мы не будем выписывать формулы Рачковского, поскольку они имеют несколько иные обозначения, чем в работах более поздних и более обобщающих, к которым мы скоро обратимся, Рачковский (1962 а) дополнил функцию Фойгта частью, описывающей преломление в линии.

Функция Фойгта:

$$H(a,v_j)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}}{(v_j-y)^2+a^2}\cdot dy \quad , \qquad [3]$$

а преломление в линии описывает функция:

$$F(a,v_j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(y-v_j)\cdot e^{-y^2}}{(v_j-y)^2+a^2}\cdot dy \quad , \qquad [4]$$

где j - относится к компонентам расщепления линии π, σ_l и σ_r

a - постоянная затухания и

$v=\Delta\lambda/\Delta\lambda_D$ - расстояние до центра линии в единицах доплеровской полуширины.

Рачковский вывел соотношение:

$$H(a,v)-2iF(a,v)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(v+ia)^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+i\int_0^{v+ia}e^{t^2}dt\right) \qquad [5]$$

разлагая правую часть в ряд Тейлора по степеням a получил

$$F(a,v)=F_0(v)+aF_1(v)+a^2F_2(v)+a^3F_3(v)+\cdots \quad ;$$

$$F_0=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot f(v) \qquad F_2=-\frac{v}{\sqrt{\pi}}+f(v)\cdot\frac{(2v^2-1)}{\sqrt{\pi}} \qquad [6]$$

$$F_1=v\cdot e^{-v^2} \qquad F_3=\frac{1}{3}v\cdot e^{-v^2}(3-2v^2) \quad ,$$

где $f(v)=e^{-v^2}\int_0^v e^{t^2}dt$ - интеграл Доусона.

Ранее такое же разложение в ряд было известно и для функции $H(a,v)$.

Выпишем коэффициенты для H_0 - H_3:

$$H_0=e^{-v^2} \qquad H_2=(1-2v^2)\cdot e^{-v^2} \qquad [7]$$

$$H_1=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot(1-2v\cdot f(v)) \qquad H_3=-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\cdot\left(1-v^2-\left(3v-2v^3\right)\cdot f(v)\right)$$

Уравнения Беккерса (1969) отличаются от уравнений Рачковского большей наглядностью, удобством записи и схожестью их с уравнениями Унно. На уравнениях Беккерса основывается большое число работ, посвященных конкретным вычислениям профилей линий, т.к. они позволяют получить полное численное решение, основанное на алгоритмах Рунге-Кутта. Беккерс предложил в своей работе хорошие граничные условия, которые являются точными решениями для атмосферы Милна Эддингтона при $B=B_0(1+\beta\tau)$ и $\eta=\eta(\tau_B)$, где τ_B - граничная оптическая глубина τ:

$$I_B=B+\left(B'\cos\vartheta\cdot(1+\eta_I)\right)/\left((1+\eta_I)^2-\eta_Q^2-\eta_U^2-\eta_V^2\right)$$

$$Q_B=-B'\cos\vartheta\cdot\eta_Q/\left((1+\eta_I)^2-\eta_Q^2-\eta_U^2-\eta_V^2\right) \qquad [8]$$

$$U_B=-B'\cos\vartheta\cdot\eta_u/\left((1+\eta_I)^2-\eta_Q^2-\eta_U^2-\eta_V^2\right)$$

$$V_B=-B'\cos\vartheta\cdot\eta_V/\left((1+\eta_I)^2-\eta_Q^2-\eta_U^2-\eta_V^2\right) \quad ,$$

где η, B и $B'\equiv\dfrac{dB}{d\tau}$ взяты при граничном значении τ_B.

Е. и М. Ланди дель'Инноченти (1972) получили систему уравнений переноса излучения в параметрах Стокса независимым путём - с использованием техники матрицы плотности.

Тем самым они подтвердили правильность ранее выведенных уравнений и прояснили некоторые разночтения, встречающиеся в литературе, в которых разные авторы вкладывали несколько различный смысл в величины одинаково обозначаемые. Систему обозначений Ланди дель'Инноченти мы и выпишем в качестве основы для составления рабочей программы расчёта профилей магнитоактивных линий численными методами по реальным моделям фотосферы. Итак, система уравнений переноса излучения:

$$\begin{aligned}
\cos\vartheta\frac{dI}{d\tau} &= (1+\eta_I)\cdot(I-B)+\eta_Q\cdot Q+\eta_U\cdot U+\eta_V\cdot V\\
\cos\vartheta\frac{dQ}{d\tau} &= \eta_Q\cdot(I-B)+(1+\eta_I)\cdot Q+\rho_V\cdot U-\rho_U\cdot V\\
\cos\vartheta\frac{dU}{d\tau} &= \eta_U\cdot(I-B)+(1+\eta_I)\cdot U-\rho_V\cdot Q+\rho_Q\cdot V\\
\cos\vartheta\frac{dV}{d\tau} &= \eta_V\cdot(I-B)+(1+\eta_I)\cdot V+\rho_U\cdot Q-\rho_Q\cdot U
\end{aligned} \qquad [9]$$

Коэффициенты поглощения и преломления, отнесённые к коэффициенту поглощения в непрерывном спектре:

$$\begin{aligned}
&\eta_I = \eta_p\sin^2\gamma+(\eta_b+\eta_r)\cdot(1+\cos^2\gamma) && \\
&\eta_Q = (\eta_p-(\eta_b+\eta_r))\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos 2\chi && \rho_Q = (\rho_p-(\rho_b+\rho_r))\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos 2\chi\\
&\eta_U = (\eta_p-(\eta_b+\eta_r))\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin 2\chi && \rho_U = (\rho_p-(\rho_b+\rho_r))\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin 2\chi\\
&\eta_V = 2\cdot(\eta_r-\eta_b)\cdot\cos\gamma && \rho_V = 2\cdot(\rho_b-\rho_r)\cdot\cos\gamma
\end{aligned}$$

[10]

Величины η_p, η_l, η_r, ρ_p, ρ_l, ρ_r мы определим несколько иначе, чем это сделано в статье Ланди дель'Инноченти. Это делается для удобства расчётов не только простых триплетов, но и линий с произвольной структурой зеемановского расщепления:

$$\begin{aligned}
\eta_p &= \eta_0\sum_{i\in\pi_{комп}}P_i\cdot H(a,v+v_H\cdot g_i)\\
\eta_{b,r} &= \eta_0\sum_{i\in\sigma_b,\sigma_r}P_i\cdot H(a,v\mp v_H\cdot g_i)\\
\rho_p &= -2\eta_0\sum_{i\in\pi_{комп}}P_i\cdot F(a,v+v_H\cdot g_i)\\
\rho_{b,r} &= -2\eta_0\sum_{i\in\sigma_b,\sigma_r}P_i\cdot F(a,v\mp v_H\cdot g_i)\quad ,
\end{aligned} \qquad [11]$$

где g_i - факторы Ланде для отдельных компонент расщепления, а

P_i - относительные интенсивности соответствующих компонент.

Сумма относительных интенсивностей всех компонент $\sum_i P_i$ нормирована на единицу. (У Ланди дель'Инноченти и у Беккерса $\sum_i P_i = 4$.)

Функцию Фойгта мы определяли выше. От формул Ланди дель'Инноченти мы сделали ещё два отступления – во-первых, использовали обозначения всех углов, введённые Беккерсом и, во-вторых, определение параметров Стокса взяли как у Унно и Беккерса.
В работе П.Арена и Е.Ланди дель'Инноченти (1982 A&A, Suppl.v.48,№1,p.81-85) формулы аналитических решений уравнений переноса с учётом аномальной дисперсии имеют следующий вид:

$$\frac{I-I_C}{I_C}=\frac{\beta}{\beta+1}\left\{\frac{(1+\eta_I)\cdot((1+\eta_I)^2+\rho_Q^2+\rho_U^2+\rho_V^2}{\Delta}-1\right\}$$

$$\frac{Q}{I_C}=-\frac{\beta}{\beta+1}\left\{\frac{(1+\eta_I)^2\cdot\eta_Q+(1+\eta_I)\cdot(\eta_V\rho_U-\eta_U\rho_V)+\rho_Q\cdot(\eta_Q\rho_Q+\eta_U\rho_U+\eta_V\rho_V)}{\Delta}\right\}$$

$$\frac{U}{I_C}=-\frac{\beta}{\beta+1}\left\{\frac{(1+\eta_I)^2\cdot\eta_U+(1+\eta_I)\cdot(\eta_Q\rho_V-\eta_V\rho_Q)+\rho_U\cdot(\eta_Q\rho_Q+\eta_U\rho_U+\eta_V\rho_V)}{\Delta}\right\}$$

$$\frac{V}{I_C}=-\frac{\beta}{\beta+1}\left\{\frac{(1+\eta_I)^2\cdot\eta_V+\rho_v\cdot(\eta_Q\rho_Q+\eta_U\rho_U+\eta_V\rho_V)}{\Delta}\right\}\qquad, \qquad [12]$$

где

$\Delta=(1+\eta_I)^2\cdot((1+\eta_I)^2-\eta_Q^2-\eta_U^2-\eta_V^2+\rho_Q^2+\rho_U^2+\rho_V^2)-(\eta_Q\rho_Q+\eta_U\rho_U+\eta_V\rho_V)^2$,

$\beta=\beta_0\cos\theta$,

$\cos\theta$ - косинус гелиоцентрического угла

β_0 - параметр атмосферы Милна-Эддингтона в формуле $B=B_0(1+\beta_0\tau)$

Расчёты по этим формулам совпадают с расчётами по формулам Рачковского (1962 б). Они позволяют проверить работу алгоритма численного интегрирования для случая атмосферы Милна-Эддингтона.

Литература:

W. Unno, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* 8, 108 (1956)

Д.Н.Рачковский *Изв.КрАО* т.27 148-161 (1962)

Д.Н.Рачковский *Изв.КрАО* т.28 259-270 (1962)

Beckers, J.M.: *Solar Physics* 9 372-386 (1969)

E.Beckers, J.M.: *Solar Physics* 9 372-386 (1969)

Landi Degl'Innocenti, E. & M.: *Solar Physics* 27, 319 (1972)

P.Arena,E.Landi Degl'Innocenti: *Astron.&Astrophys.,Suppl.* v.48, 81-85 (1982)