

## Расчет профилей Фойгта для моделирования отклика спектральных линий на вариации физических величин в моделях фотосферы

*С.Г. Можаровский*

Уссурийская астрофизическая обсерватория ДВО РАН, Уссурийск, Россия  
sw@newmail.ru

При моделировании процесса переноса излучения в спектральной линии на каждом элементарном шаге расчета необходимо вычислить профиль поглощения линии, т.е. профиль Фойгта. Он является сверткой профилей Лоренца и Гаусса, зависит от двух параметров  $a$  и  $v$ , где  $a$  – отношение ширин профилей Лоренца и Гаусса,  $v = \Delta\lambda / \Delta\lambda_D$ ,  $\lambda$  – длина волны,  $\Delta\lambda_D$  – доплеровское уширение линии и  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  – расстояние точки профиля от его центра. Профиль Фойгта разделяют на реальную и мнимую часть  $H$  и  $F$ .

$$H = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} \cdot dy \quad (1)$$

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} (v-y)}{(v-y)^2 + a^2} \cdot dy$$

Реальная часть  $H$  описывает форму профилей интенсивности спектральных линий, а мнимая часть  $F$  важна для учета вращения плоскости поляризации, которая существенна при формировании профилей Стокса магнитоактивных линий в присутствии магнитного поля. Точность, которую нужно достичь, определяется целью расчета. Чаще всего вычисления нужны, чтобы сравнить модельные данные с данными, полученными из наблюдений. Известный алгоритм Хумличека (1979) дает точность вычислений не хуже  $10^{-6}$ , и покрывает потребности обработки практически всех наблюдательных данных. Так как прогресс техники направлен, прежде всего, на улучшение пространственного, временного и спектрального разрешений, то точность измерений при наблюдениях с 1979 года по настоящее время не увеличилась существенно.

Однако точность  $10^{-6}$  может быть недостаточной для профилей спектральных линий, которые используются в численном эксперименте. Иногда требуется изучить очень малые изменения физических величин, например, изменения в тонком слое модели фотосферы величин лучевой скорости, напряженности магнитного поля и т.д. Дело в том, что их значительные изменения могут вызывать нелинейный отклик в профилях спектральных линий. Стараясь остаться в линейной области, приходится иметь дело с элементарными изменениями интенсивности профилей порядка  $10^{-6} - 10^{-9}$ . Ошибка алгоритма Хумличека (1979) не является плавной, она выглядит как ряд зубцов (см. рис. 1) смежных на шкале  $v$  точек. Поэтому малое смещение точек профиля Фойгта по длинам волн может испортить нам картину моделирования.

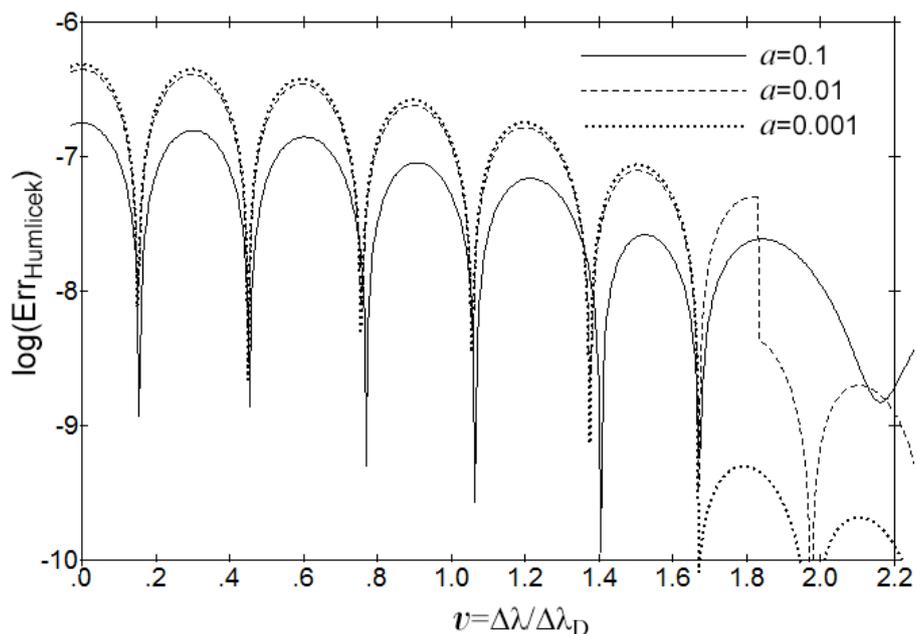


Рис. 1. Логарифм разности вычислений реальной части профиля Фойгта  $H$  с помощью алгоритма Humlikek (1979) и прямым численным интегрированием в зависимости от параметра  $v$  при трех значениях параметра  $a$ .

Нелинейность отклика профиля линии на малые изменения физической величины можно продемонстрировать конкретным примером. Если взять спектральную линию Fe I  $\lambda$  6302 Å в условиях тени солнечного пятна и задавать небольшие приращения магнитного поля в узком слое (шириной 5-10 км), то приращения интенсивности будут неравномерными при равномерном изменении поля. Эта неравномерность составляет 0.2% на каждый Гаусс, и становится очевидной, если взять элементарные отклонения поля одинаковые по амплитуде но с разным знаком, см. рис. 2.

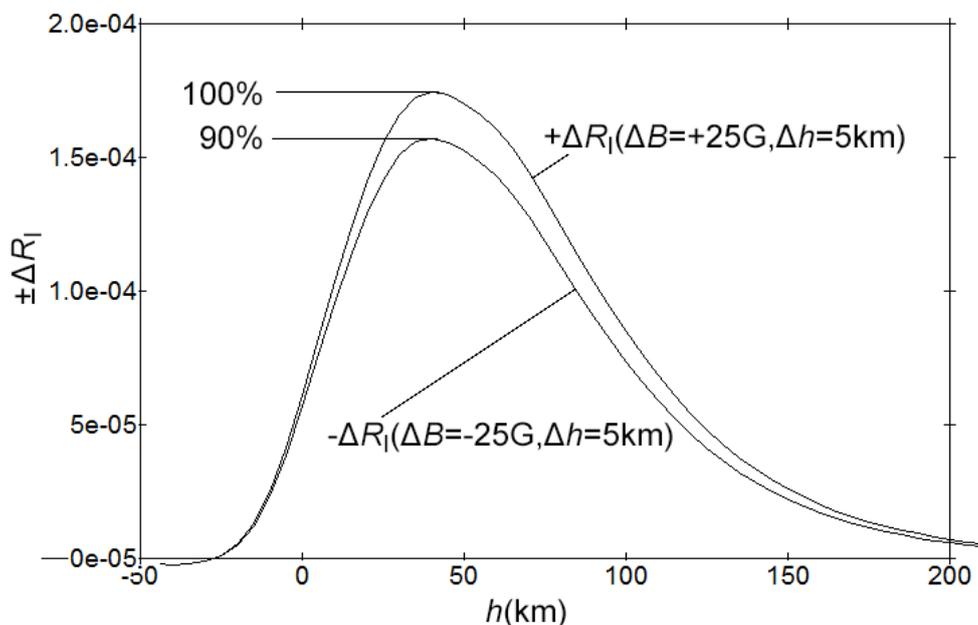


Рис. 2. Иллюстрация нелинейности отклика профиля интенсивности спектральной линии на одинаковые вариации напряженности магнитного поля разного знака. На рисунке приведены две функции отклика интенсивности в крыле на расстоянии  $182 \text{ mÅ}$  от центра линии. Для расчета использована модель тени Stellmacher & Wiehr 1975, напряженность магнитного поля 2800 Гс, угол вектора поля с лучом зрения  $15^\circ$ . Вариации поля величиной  $+25$  и  $-25$  Гс прикладывались к слою с  $\Delta h = 5$  км, который перемещался вдоль всей высоты модели фотосферы с тем, чтобы сформировать функции отклика.

Таким образом, в численных экспериментах, в отличие от результатов наблюдений, иногда могут требоваться вычисления функции Фойгта с точностью до  $10^{-10}$ .

Существует много работ, посвящённых расчетам функции Фойгта, в том числе расчетам с произвольной точностью (см., например, Boyer and Lynas-Gray, 2014). Однако реализация этих алгоритмов требует существенных усилий. Поэтому мы разработали алгоритм, который легко реализовать и который работает достаточно быстро. По простоте его можно сравнить с методом перебора в шахматной задаче. Дешевизна компьютерной памяти позволила упростить схему расчета, которую можно разбить на две фазы:

1. Заполнить двумерную сетку опорных значений профиля Фойгта, вычисленных для заданных значений  $a$  и  $v$  с необходимой точностью.
2. Делать интерполяцию кубическими сплайнами по очереди сначала по одной, затем по другой координате.

Ошибка интерполяции неодинакова в разных областях определения параметров  $a$  и  $v$  и зависит от шага разбиения. Для достижения точности  $10^{-12}$  интервал значений  $a$  в диапазоне от 100 до  $10^{-3}$  нужно разбить на 2000 одинаковых в логарифмической шкале отрезков. Значения  $v$  в диапазоне от 0 до 4 разбиваем на равные в линейной шкале отрезки с шагом по 0.003, это 1350 точек (см. Область 1 на рис. 3), а в диапазоне от 4 до 2000 разбиваем также на 1350 отрезков, но уже с равным шагом в логарифмической шкале (Область 2 на рис. 3). Для предварительного заполнения матриц мы вычисляем профиль Фойгта прямым численным интегрированием с помощью процедуры QUANC8 (Форсайт, Малькольм, Моулер, 1980) с точностью  $10^{-13}$ . Это занимает много минут, поэтому один раз рассчитанную матрицу сохраняем на диске. В области  $a < 10^{-3}$  (Область 3 на рис. 3) профиль Фойгта не интерполируется, а вычисляется разложением выражений (1) в ряд Тейлора по степеням  $a$  (Рачковский, 1962). Этот способ вычисления при  $a < 10^{-3}$  предоставляет необходимую нам точность и работает быстрее. Кроме того из-за свойств подынтегральных функций (1) и ограничения числа значащих цифр системы программирования (18 цифр в случае использования нами системы Delphi) точность расчета процедуры QUANC8 ухудшается при малых  $a$ . Разложение для  $H$  можно найти в работе (Harris, 1948):

$$H(a, v) = H_0(v) + aH_1(v) + a^2H_2(v) + a^3H_3(v) + a^4H_4(v) + \dots$$

$$H_0 = e^{-v^2}$$

$$H_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot (1 - 2v \cdot f(v))$$

$$H_2 = (1 - 2v^2) \cdot e^{-v^2}$$

$$H_3 = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot (1 - v^2 - v \cdot (3 - 2v^2) \cdot f(v))$$

$$H_4 = \frac{1}{6} (3 - 4v^2(3 + v^2)) \cdot e^{-v^2}$$

А разложение для  $F$  в работе Рачковского (1962):

$$F(a, v) = F_0(v) + aF_1(v) + a^2F_2(v) + a^3F_3(v) + \dots$$

$$F_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot f(v)$$

$$F_1 = v \cdot e^{-v^2}$$

$$F_2 = -\frac{v}{\sqrt{\pi}} + f(v) \cdot \frac{(2v^2 - 1)}{\sqrt{\pi}}$$

$$F_3 = \frac{1}{3} v \cdot e^{-v^2} (3 - 2v^2)$$

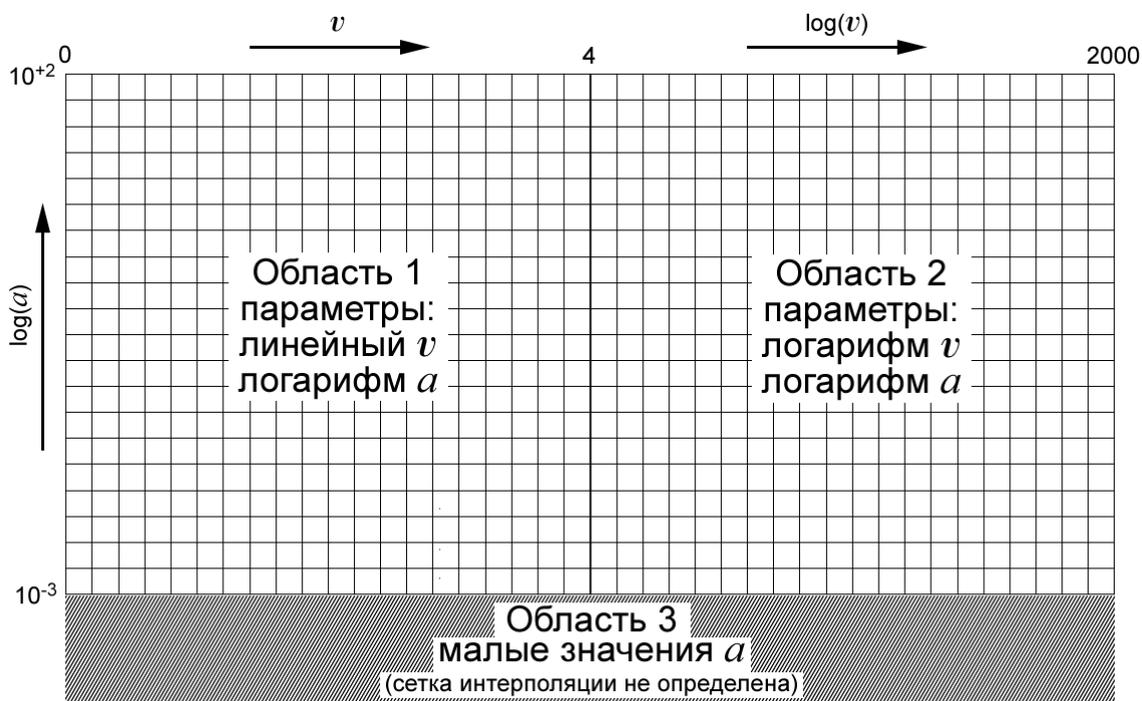


Рис. 3. Схема организации сетки узлов для интерполяции значений функции Фойгта.

Если вместо функции численного интегрирования QUANC8 (Форсайт, Малькольм, Моулер, 1980) использовать более точные способы определения значений функции Фойгта в опорных точках, то, соответственно уменьшив шаг сеток, можно получить любую наперед заданную точность работы нашего алгоритма. При этом потребуется больше оперативной памяти, но скорость вычислений останется неизменной, она примерно втрое медленнее, чем для алгоритма Хумличека (1979).

В приложениях приведены:

- а) Исходные тексты программ на языке Паскаль (для системы программирования Delphi)
- б) Таблицы опорных значений  $H$  и  $F$  в узловых точках сетки интерполяции.

Приложения можно найти на странице <http://uafo.ru/msg/voigt.html>

## Литература

Boyer W., Lynas-Gray A.E. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2014. V. 444. P. 2555.

Harris III D.L. // Astrophys. J. 1948. V. 108. P. 112.

Humlíček J. // Journ. Quant. Spectroscopy and Rad. Transfer. 1979. V. 21. P. 309.

Рачковский Д.Н. // Изв. Крымск. Астрофиз. Обсерв. 1962. Т. 27. С. 148.

Форсайт Дж., Малькольм А., Моулер К. // Машинные методы математических вычислений. / Москва, «Мир», 1980.