

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. Н. Рачковский

Приводятся основные формулы и краткое описание алгоритма численного решения уравнений переноса в магнитном поле. Предполагается наличие локального термодинамического равновесия. Учитывается только истинное поглощение. Градиент скоростей и магнитное поле меняются с глубиной.

NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLUTION THE TRANSFER EQUATIONS TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE OF THE MAGNETIC FIELD, by *D. N. Rachkovsky*.— The main equations and comments to them are presented to compute the radiative transfer equations taking into account the presence of the magnetic field. The LTE condition is assumed and only a true absorption is being accounted upon. Magnetic field and the velocity gradient are considered as the function of depth of the photosphere.

Изучение структуры магнитного поля в активных областях является важной задачей физики Солнца. Поляризованное излучение в магнитоактивных линиях представляет нам основную информацию о структуре магнитного поля. Для интерпретации поляризованного излучения необходимо опираться на какую-либо модель атмосферы Солнца и решать уравнения переноса излучения при наличии магнитного поля. При этом обычно предполагается наличие локального термодинамического равновесия (ЛТР).

Решение численной задачи переноса поляризованного излучения в магнитном поле при наличии ЛТР и в пренебрежении рассеянием в линии было получено впервые в [1]. Однако программа была составлена в машинном коде ЭВМ «Минск-1» и с переходом к использованию более современной ЭВМ ЕС-1033 оказалась непригодной к применению.

Задачи интерпретации магнитоактивных линий в атмосферах Солнца и звезд потребовали программы решения уравнений переноса излучения в магнитном поле, но написанной на алгоритмическом языке.

Поскольку даже в работах автора встречаются разные определения параметров Стокса, что приводило к некоторым отличиям в формулах, ниже приводится не только краткое описание алгоритма, но и основные формулы для численного решения уравнений переноса. Некоторым усовершенствованием по сравнению с [1] является учет возможного наличия нормального к поверхности атмосферы градиента скоростей.

Численно решаемые уравнения переноса записываются [2] так:

$$\cos \theta \frac{d\mathbf{I}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{k_{5000}(\tau)} (k_{\lambda}(\tau) + \alpha(\tau)) \left(\mathbf{I}(\tau) - \frac{1}{2} \mathbf{B}(\tau) \right), \quad (1)$$

здесь $\mathbf{I}(\tau)$ и $\mathbf{B}(\tau)$ — векторы-параметры Стокса,

$$\mathbf{I}(\tau) = \{I_x(\tau), I_y(\tau), V(\tau), U(\tau)\}; \quad \mathbf{B}(\tau) = B(\tau) \{1, 1, 0, 0\}, \quad (2)$$

$k_{5000}(\tau)$, $k_\lambda(\tau)$ — коэффициенты поглощения при $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ и в центре линии, $B(\tau)$ — функция Планка.

Определим параметры Стокса:

$$I_x = \overline{E_x E_y^*}, \quad I_y = \overline{E_y E_x^*}, \quad V = -\sqrt{2} \operatorname{Im}(\overline{E_x E_y^*}), \quad U = \sqrt{2} \operatorname{Re}(\overline{E_x E_y^*}), \quad (3)$$

Здесь E_x , E_y — проекции вектора электрической напряженности волны на оси x , y . Некоторые отличия численных множителей у параметров V и U от общепринятых объясняются желанием сделать матрицу α и матрицы преобразований параметров Стокса более симметричными.

Имеем далее

$$\alpha = N\kappa_0 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{23} & \alpha_{13} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{24} & \alpha_{14} & \alpha_{34} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0,5(k_1 + k_2 + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2k_0 - k_1 - k_2)), \\ \alpha_{22} &= 0,5(k_1 + k_2 + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2k_0 - k_1 - k_2)), \\ \alpha_{33} &= 0,5(k_1 + k_2 + 0,5 \sin^2 \gamma \cdot (2k_0 - k_1 - k_2)), \\ \alpha_{13} &= -\frac{\sqrt{2}}{4}((k_1 - k_2) \cos \gamma - 0,5 \sin 2\varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2m_0 - m_1 - m_2)), \\ \alpha_{14} &= \frac{\sqrt{2}}{4}((m_2 - m_1) \cos \gamma - 0,5 \sin 2\varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2k_0 - k_1 - k_2)), \\ \alpha_{23} &= \frac{\sqrt{2}}{4}((k_2 - k_1) \cos \gamma - 0,5 \sin 2\varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2m_0 - m_1 - m_2)), \\ \alpha_{24} &= \frac{\sqrt{2}}{4}((m_1 - m_2) \cos \gamma - 0,5 \sin 2\varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2k_0 - k_1 - k_2)), \\ \alpha_{34} &= 0,25 \cos 2\varphi \cdot \sin^2 \gamma \cdot (2m_0 - m_1 - m_2), \end{aligned} \quad (5)$$

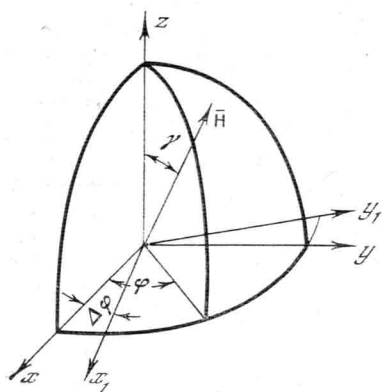
где k_0 , k_1 , k_2 и m_0 , m_1 , m_2 — зеемановские составляющие коэффициентов поглощения и преломления. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к поглощению лево- и правополяризованного излучения. Углы γ и φ определяют положение вектора $\mathbf{H}$ — напряженности магнитного поля относительно выбранной системы координат.

При интегрировании уравнений (1) мы выбрали систему координат x , y , жестко связанную с положением проекции вектора $\mathbf{H}$ магнитного поля так, что всегда $\varphi = +45^\circ$. Тем самым матрица несколько упрощается:

$$\alpha = N\kappa_0 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{23} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{24} & \alpha_{14} & 0 & \alpha_{11} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Однако при этом возникает необходимость преобразования параметров Стокса при повороте осей x , y на угол φ (рисунок):

$$\mathbf{I}(\Delta\varphi) = \begin{vmatrix} \cos^2 \Delta\varphi & \sin^2 \Delta\varphi & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\Delta\varphi \\ \sin^2 \Delta\varphi & \cos^2 \Delta\varphi & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\Delta\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\Delta\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\Delta\varphi & 0 & \cos 2\Delta\varphi \end{vmatrix}. \quad (7)$$



Вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ в системе координат x, y, z

Световой луч направлен по оси z . Оси x_1, y_1 показывают поворот системы координат при движении вдоль оси z

Коэффициенты поглощения и преломления k и m определяются по соотношениям [3]:

$$k + im = H(a, v), \quad (8)$$

$$H(a, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(v+ia)^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \right. \\ \left. + i \int_0^{v+ia} \exp(t^2) dt \right), \quad (9)$$

полагая

$$H(a, v) = H_0(v) + aH_1(v) + a^2H_2(v) + \dots, \quad (10)$$

легко найти рекуррентное соотношение

$$kH_k(v) = 2H_{k-2}(v) + 2ivH_{k-1}(v). \quad (11)$$

Первые два коэффициента ряда (10) имеют вид

$$H_0(v) = e^{-v^2} + i \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(v), \quad H_1(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2vf(v) - 1) - i2ve^{-v^2}, \\ f(v) = e^{-v^2} \int_0^v e^{t^2} dt. \quad (12)$$

Выражения (10)–(12) могут обеспечить точность не хуже 10^{-11} при $a \leq 0,5$.

Выражения (1)–(12) являются основными в численном решении задачи переноса излучения в магнитном поле.

Рассмотрим кратко алгоритм решения уравнений переноса излучения. Уравнения (1) интегрируются методом Рунге—Куты. Точность интегрирования определяется вкладом в выходящее излучение самых глубоких слоев модели атмосферы.

Для уменьшения времени счета итеративной процедурой рассчитывается излучение только в каждой второй частоте излучения по точкам.

Расчет начинается с нахождения оптических толщин в $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ для геометрических глубин модели. Затем находится интерполяционный сплайн $\tau(h)$. Далее находятся интерполяционные сплайны для функций, входящих в уравнение (1):

$$\eta(\tau) = k_\lambda(\tau)/k_{5000}(\tau), \quad \Delta\lambda_D(\tau), \quad B(\tau), \quad N(\tau)\kappa_0(\tau).$$

Зависимость величины и направления вектора напряженности магнитного поля, а также лучевой скорости от оптической глубины задается разложением по степеням τ .

По желанию вычисляются эффективные глубины образования параметров I_x и I_y и зависимость четырех параметров Стокса от оптической глубины τ .

В дальнейшем мы надеемся применить данную программу для расчета параметров Стокса ряда магнитоактивных линий в атмосферах некоторых магнитных звезд и активных областях Солнца.

Декабрь 1984 г.

Л и т е р а т у р а

1. Рачковский Д. Н. Образование линий поглощения в неоднородном магнитном поле. — Изв. Крым. астрофиз. общ., 1969, т. 40, с. 127–137.
2. Рачковский Д. Н. Магнито-оптический эффект в спектральных линиях солнечных пятен. — Изв. Крым. астрофиз. общ., 1962, т. 27, с. 148–161.
3. Унзольд А. Физика звездных атмосфер/Пер. с нем. под ред. Э. Р. Мустеля М.: Изд-во иностр. лит., 1949.