

К ВОПРОСАМ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. Н. Рачковский

Сравниваются уравнения переноса в магнитном поле, выведенные К. Каем [1], И. Беккерсом [2] и автором [3]. Показано, что уравнения Кая неверны. В уравнениях, полученных Беккерсом, надо увеличить в два раза коэффициент аномальной дисперсии. Численно проинтегрированы уравнения переноса в поперечном магнитном поле, испытывающем скачок величины в 45° . Показано, что в этом случае должно наблюдаться расщепление линии на две с взаимнообратной круговой поляризацией излучения.

ON THE THEORY OF RADIATION TRANSFER IN UNHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD, by D. N. Rachkovsky.—The equations of radiation transfer in the presence of magnetic field derived by K. Kai [1], I. M. Beckers [2] and the author [3] are considered. It is shown that equations by K. Kai are not correct. The coefficient of anomalous dispersion in Beckers' equations is wrong by the factor two. The transfer equations are integrated numerically when direction of pure transverse field is changing by 45° discontinuously. It is found that in this case the line is splitted into two components with opposite circular polarizations.

В последнее время опубликованы работы Кая [1], Беккерса [2], автора [3], посвященные учету аномальной дисперсии в теории переноса излучения в магнитном поле. Представляет интерес провести сравнение систем уравнений переноса, полученных этими авторами.

Первая и вторая части статьи посвящены критике уравнений, полученных в [1] и [2]. В третьей части приводятся результаты численного интегрирования уравнений, выведенных в [3] для одного случая неоднородного магнитного поля.

1. КРИТИКА УРАВНЕНИЙ, ВЫВЕДЕННЫХ КАЕМ [1]

Кай с помощью дисперсионного соотношения для магнитоактивной среды вывел уравнения переноса излучения в среде с однородным магнитным полем. Такие уравнения уже были выведены ранее тем же методом автором [4]. Уравнения, полученные Каем и нами, сильно различаются. Ниже мы покажем, что уравнения Кая неверны.

В магнитоактивной среде распространяются два колебания с комплексными векторами [4]

$$e_1 = \frac{Ax_0 + By_0}{\sqrt{AA^* + BB^*}}, \quad e_2 = \frac{-A^*x_0 + B^*y_0}{\sqrt{AA^* + BB^*}}, \quad (1)$$

где

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{1,2} = i \frac{\frac{\sin^2 \gamma}{2} (2s_0 - s_1 - s_2) \pm \sqrt{\frac{\sin^4 \gamma}{4} (2s_0 - s_1 - s_2)^2 + \cos^2 \gamma (s_1 - s_2)^2}}{(s_1 - s_2) \cos \gamma}, \quad (2)$$

$$s = k + im, \quad (3)$$

$$k = Nk_0 \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} dy = Nk_0 H(a, v), \quad (4)$$

$$m = Nk_0 \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-v) e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} dy = 2Nk_0 F(a, v), \quad (5)$$

$$H(a, v) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i H_i(v), \quad F(a, v) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i F_i(v), \quad (6)$$

$$F_0 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} f(v), \quad f(v) = e^{-v^2} \int_0^v e^{t^2} dt,$$

$$F_1(v) = v_0 e^{-v^2}, \quad F_2(v) = -\frac{v}{\sqrt{\pi}} + f(v) \frac{2v^2 - 1}{\sqrt{\pi}}. \quad (7)$$

Кай эти два колебания записывает в виде

$$e_1 = b_1 x_0 + ib_2 y_0, \quad e_2 = ib_2 x_0 + b_1 y_0. \quad (8)$$

Следовательно, должно быть

$$R_1 = \frac{ib_2}{b_1} = \left(\frac{A}{B}\right)_1. \quad (9)$$

Но выражение для R_1 Кай в явном виде не получил, а оно следует из соотношений А-5, А-7 [1]:

$$R = [(1 + \alpha'_{zz}) \{\Re^2 - (1 + \alpha'_{xx})\} + \alpha'_{xz} \alpha'_{zx}] [\alpha'_{xy} (1 + \alpha'_{zz}) - \alpha'_{xz} \alpha'_{zx}]^{-1}, \quad (10)$$

$$(1 + \alpha'_{zz}) \{\Re^2 - (1 + \alpha'_{xx})\} \{\Re^2 - (1 + \alpha'_{yy})\} + \alpha'_{xz} \alpha'_{zx} \{\Re^2 - (1 + \alpha'_{yy})\} + \\ + \alpha'_{yz} \alpha'_{zy} \{\Re^2 - (1 + \alpha'_{xx})\} - (\alpha'_{yx} \alpha'_{zy} \alpha'_{xz} + \alpha'_{zx} \alpha'_{xy} \alpha'_{yz}) - \alpha'_{xy} \alpha'_{yx} (1 + \alpha'_{zx}) = 0, \quad (11)$$

Сложность выражений (10), (11), видимо, не позволила Каю заметить, что R не чисто мнимая величина, а комплексная.

Для иллюстрации комплексности $R_{1,2}$ ниже приводится таблица:

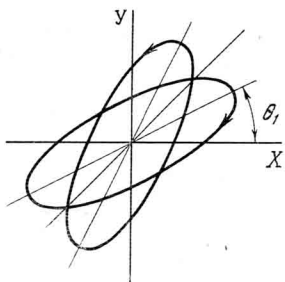
v	R_1	R_2	$ R_1 $	θ_1
0,0	0,362+0,9	0,362-0,932	1,000	45°
0,4	0,303+0,8	0,373-1,044	0,814	36°27'
0,8	0,234+0,8	0,329-1,140	0,710	29°7'
1,2	0,121+0,8	0,185-1,220	0,657	18°37'
1,6	0,130+0,1	0,206-1,242	0,631	18°37'

В первом столбце дается расстояние от центра линии v , выраженное в доплеровских полуширинах, во втором, третьем и четвертом — величины $R_{1,2}$, в пятом — угол между одной из осей эллипса и осью x .

Фиг. 1 схематически показывает относительное расположение эллипсов двух главных колебаний.

Вычисления производились по формулам (2)–(7) при значении $a = 0,2$, $\Delta v_H = 1,0$.

Итак, b_1, b_2 в (8) не вещественны, и вместо соотношений $b_1^2 + b_2^2 = 1$, $e_1 e_2^* = 0$ в [1] имеем $b_1 b_1^* + b_2 b_2^* = 1$, $e_1 e_2^* \neq 0$.



Фиг. 1. Взаимное расположение эллипсов двух главных колебаний

Поэтому связь между параметрами I, Q, V, U и I_1, I_2, I_+, I_- в [1] неверна, правильную зависимость легко получить из (17), (18) [4], положив

$$D = \frac{ib_2}{b_1}. \quad (12)$$

Дальнейшие выкладки Кая основываются на связи между параметрами I, Q, V, U и I_1, I_2, I_+, I_- , поэтому выведенные в итоге уравнения переноса в общем случае неверны. В чисто продольных и поперечных полях коэффициенты b_1 и b_2 вещественны, правильность уравнений, полученных Каем, в этих случаях не проверялась.

2. К РАБОТЕ БЕККЕРСА [2]

Беккерс применил при выводе уравнений переноса излучения в неоднородном магнитном поле метод сферы Пуанкаре и при этом допустил ошибку. Рассмотрим формулы (10') [2]. Запаздывание по фазе π -компоненты излучения равняется

$$dR_p = \frac{-\eta_0}{H(0, a)} \frac{\sin^2 \gamma}{2} F(v, a) \frac{d\tau}{\cos \theta}. \quad (13)$$

При $\theta = 0$, $\gamma = 90^\circ$, $a = 0$

$$dR_p = -k_0 \frac{F_0(v)}{2} \Delta z, \quad (14)$$

где $F_0(v)$ определено (7).

С другой стороны, согласно (8) [2]

$$n - 1 = \frac{k_0 \lambda}{2\pi} F_0(v). \quad (15)$$

Для изменения амплитуды электрического вектора только вследствие запаздывания имеем

$$E_p(z + \Delta z) = E_p(z) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n \Delta z}.$$

Подставляя сюда (15), получаем

$$E_p(z + \Delta z) = E_p(z) e^{-ik_0 F_0(v) \Delta z}.$$

Итак, правильное выражение для запаздывания компонент

$$\begin{aligned} dR_{v,r} &= -\frac{\eta_0}{H(0, a)} \frac{1 + \cos^2 \gamma}{2} F(v \pm v_H, a) \frac{d\tau}{\cos \theta}, \\ dR_p &= -\frac{\eta_0}{H(0, a)} \sin^2 \gamma F(v, a) \frac{d\tau}{\cos \theta}. \end{aligned} \quad (16)$$

В формулах (13), (14) [2] фигурирует угол $\tilde{\gamma}$, который можно исключить с помощью соотношений

$$\sin \tilde{\gamma} = \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma}, \quad \cos \tilde{\gamma} = \frac{2 \cos \gamma}{1 + \cos^2 \gamma}. \quad (17)$$

Тогда (13), (14) [2] запишутся так:

$$\rho_R = \frac{\eta_0}{H(0, a)} \cos \gamma (F_r - F_b), \quad \rho_W = -\frac{\eta_0}{H(0, a)} \frac{\sin^2 \gamma}{2} (2F_0 - F_r - F_b); \quad (18)$$

(18) вместе с функциями (19)

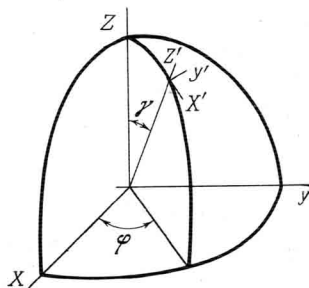
$$\begin{aligned} \eta_I &= \frac{\eta_p}{2} \sin^2 \gamma + \frac{\eta_b + \eta_r}{4} (1 + \cos^2 \gamma), & \eta_V &= \frac{\eta_b - \eta_r}{2} \cos \gamma, \\ \eta_Q &= \frac{\sin^2 \gamma}{4} \cos 2\chi (2\eta_p - \eta_b - \eta_r), \\ \eta_U &= \frac{\sin^2 \gamma}{4} \sin 2\chi (2\eta_p - \eta_b - \eta_r) \end{aligned} \quad (19)$$

определяют уравнения переноса

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{dI}{d\tau} &= (1 + \eta_I)(I - B) + \eta_Q Q + \eta_U U + \eta_V V, \\ \cos \theta \frac{dQ}{d\tau} &= \eta_Q (I - B) + (1 + \eta_I) Q - \rho_R U + \rho_W \sin 2\chi V, \\ \cos \theta \frac{dU}{d\tau} &= \eta_U (I - B) + \rho_R Q + (1 + \eta_I) U - \rho_W \cos 2\chi V, \\ \cos \theta \frac{dV}{d\tau} &= \eta_V (I - B) - \rho_W \sin 2\chi Q + \rho_W \cos 2\chi U + (1 + \eta_I) V. \end{aligned} \quad (20)$$

Фиг. 2. Относительное расположение луча и вектора магнитной напряженности

Луч света направлен вдоль оси Z , вектор магнитной напряженности — вдоль оси Z'



Обратимся теперь к уравнениям, полученным нами в [3]. В системе координат, показанной на фиг. 2, они запишутся

$$\cos \theta \frac{d\bar{I}}{d\tau} = -\hat{\alpha} \left(\bar{I} - \frac{1}{2} \bar{B} \right), \quad (21)$$

где

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Re} a & 0 & -\operatorname{Im} c_1 & \operatorname{Re} c_1 \\ 0 & 2 \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} c_2 & \operatorname{Re} c_2 \\ \operatorname{Im} c_2 & -\operatorname{Im} c_1 & \operatorname{Re}(a+b) & \operatorname{Im}(b-a) \\ \operatorname{Re} c_2 & \operatorname{Re} c_1 & \operatorname{Im}(a-b) & \operatorname{Re}(a+b) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$B(\tau) = B(\tau) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} [s_1 + s_2 + \cos^2 \varphi \sin^2 \gamma (2s_0 - s_1 - s_2)], \\
 b &= \frac{1}{4} [s_1 + s_2 + \sin^2 \varphi \sin^2 \gamma (2s_0 - s_1 - s_2)], \\
 c_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} [i(s_1 - s_2) \cos \gamma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin^2 \gamma (2s_0 - s_1 - s_2)], \\
 c_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4} [i(s_2 - s_1) \cos \gamma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin^2 \gamma (2s_0 - s_1 - s_2)].
 \end{aligned} \quad (24)$$

В (20) введены параметры

$$I = \overline{E_x E_x^*} + \overline{E_y E_y^*}, \quad Q = \overline{E_x E_x^*} - \overline{E_y E_y^*}, \quad V = -2 \operatorname{Im} \overline{E_x E_y^*}, \quad U = 2 \operatorname{Re} \overline{E_x E_y^*}.$$

В (24) введены параметры

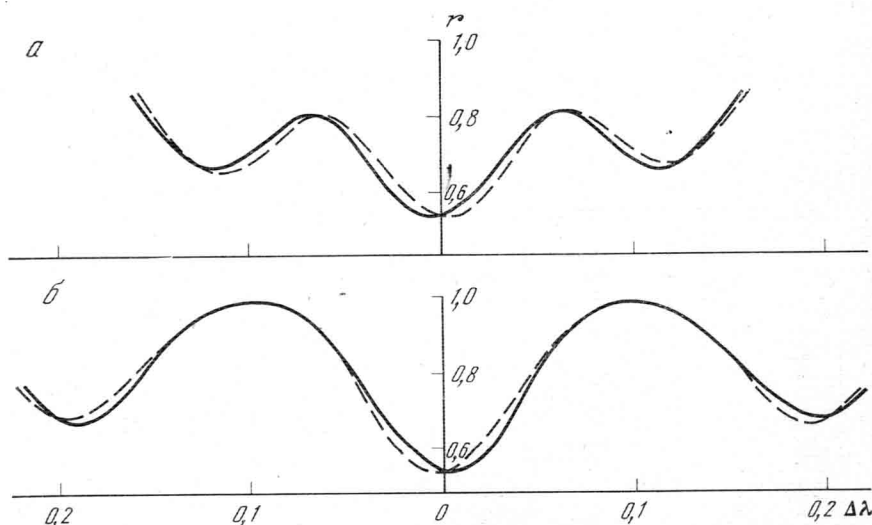
$$I_1 = \overline{E_x E_x^*}, \quad I_2 = \overline{E_y E_y^*}, \quad V = -\sqrt{2} \operatorname{Im} \overline{E_x E_y^*}, \quad U = \sqrt{2} \operatorname{Re} \overline{E_x E_y^*}.$$

Не представляет труда показать, что системы (20), (24) эквивалентны при равенствах индексов

$$(0, 1, 2) = (p, r, b),$$

3. ЭФФЕКТ РАСЩЕПЛЕНИЯ π - И σ -КОМПОНЕНТ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Б. Северный [5] впервые обнаружил эффект расщепления компоненты линии $\lambda 6302 \text{ \AA}$ Fe I в сильном магнитном поле. Этот эффект он объясняет неоднородностями магнитного поля. Несколько другое объяснение было предложено автором в [4]. Расщепление объяснялось вращением Фарадея при наличии скрещенных перпендикулярных лучу магнитных полей. Однако расчеты, проведенные в этой статье, были малообоснованы, так как оптические параметры среды подобраны с тем, чтобы объяснить возможность существования этого эффекта. Применялась также теория образования линии поглощения в однородном магнитном поле.



Фиг. 3. Расщепление линии $\lambda 5250 \text{ \AA}$ Fe I в скрещенных под углом 45° поперечных полях

$a - H = 3000 \text{ гс}$; $b - H = 5000 \text{ гс}$. Сплошная и штриховая кривые относятся к противоположно поляризованным круговым составляющим излучения

В связи с этим было интересно применить развитую в [3] теорию переноса излучения в неоднородном магнитном поле, не задаваясь уже произвольно оптическими характеристиками среды. Единственным предположением было то, что на определенной оптической глубине, приблизительно равной глубине образования линии, происходит смена направлений магнитного поля. За модель пятна принималась модель солнечной фотосферы [6].

Объясним кратко, почему понадобилось предположение о скрещенных магнитных полях для объяснения эффекта расщепления. Известно, что коэффициент аномальной дисперсии меняет знак в центре линии. Поэтому излучение, линейно поляризованное в нижней части атмосферы пятна, подвергается в верхней части действию, аналогичному действию пластинки $1/4$ волны. При этом знак возникающей круговой поляризации справа и слева от центра компоненты будет различный.

Уравнение (21) численно интегрировалось методом Рунге — Куна. На глубине с $\tau = 10$ принималось

$$I(\tau) = B(\tau).$$

Фиг. 3 показывает эффект расщепления π - и σ -компоненты в свете с противоположной круговой поляризацией. Отметим, что направление смещения σ -компоненты такое же, как π -компоненты. Между тем смещение должно было быть обратным. Видимо, здесь играет роль перекрытие коэффициентов преломления для различных компонент, а также изменение $\Delta\lambda_D$ с глубиной.

Отметим также, что если изменить относительное расположение полей в верхней и нижней части атмосферы пятна на обратное, то левую и правополяризованные составляющие линии поменяются местами на фиг. 3.

Декабрь 1969 г.

Л и т е р а т у р а

1. K. K a i. Publ. Astron. Soc. Japan, 1968, 20, 154.
2. I. M. B e c k e r s. Sol. Phys., 1969.
3. Д. Н. Р а ч к о в с к и й. Изв. Крымской астрофиз. obs., 1970, 40, 000.
4. Д. Н. Р а ч к о в с к и й. Изв. Крымской астрофиз. obs., 1962, 27, 148.
5. А. Б. С е в е р н ы й. Астрон. ж., 1959, 36, вып. 2, 208.
6. L. R. W. H e i n t z e, H. H u b e n e t, C. D e J a g e r. Bull. Astron. Netherl., 1964, 17, 442.